سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دکتر حمید حسن‌پور

فصل چهارم

تبدیل Z

فهرست مطالب فصل

۴- ۱- مقدمه

۴- ۲- تعریف

۴- ۳- صفرها و قطب‌های سیگنال در صفحه Z

۴- ۴- ویژگی‌های ROC

۴- ۵- ویژگی‌های تبدیل Z

۴- ۶- تبدیل Z معکوس

۴- ۷- تابع سیستم

۴- ۸- ویژگی‌های سیستم‌های LTI

۴- ۹- حل سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیلی

۴- ۱۰- تبدیل Z یک طرفه

۴- ۱۱- کدهای Matlab

مقدمه

- همانطور که در فصل قبل مطرح شد، تابع ویژه یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت z^n تعریف می‌شود. در این رابطه z یک متغیر مختلط است. همچنین مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه z^n برای سیستم‌های LTI به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

- در رابطه بالا، $H(z)$ تبدیل z سیگنال $h[n]$ نامیده می‌شود.

تعریف

- تبدیل z سیگنال $x[n]$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$$

- که در این رابطه z یک متغیر مختلط است.
- شرط وجود تبدیل z برای سیگنال $x[n]$ وجود مجموع بالا است (حاصل‌جمع بینهایت نشود).

تعریف (ادامه)

- معمولا برای نشان دادن تبدیل z یک سیگنال از دو نمایش زیر استفاده می‌شود.

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

- در این تبدیل متغیر z به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z = re^{j\Omega}$$

- که در آن r و Ω به ترتیب اندازه و زاویه z است.
- با توجه به تعریف متغیر z، صفحه z دارای دو محور است. معمولا محور افقی این صفحه بخش موهومی، و محور عمودی آن بخش حقیقی z است.

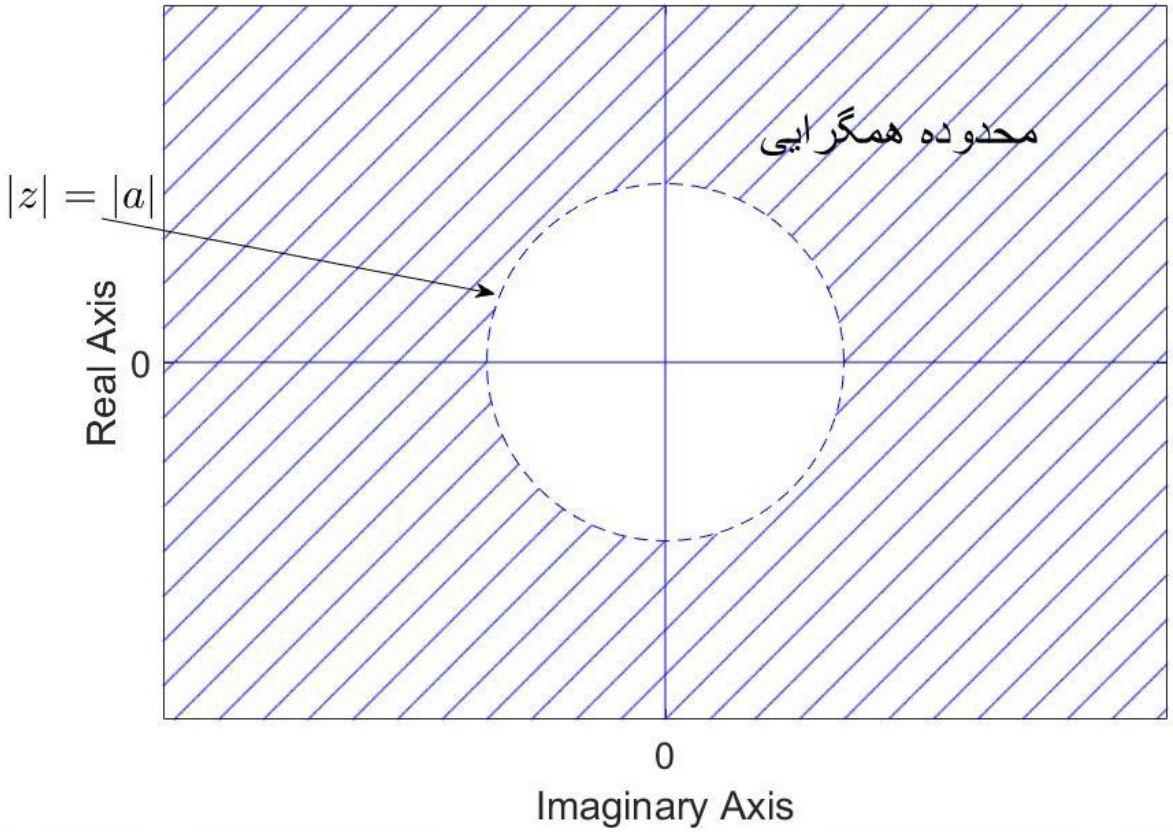
مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = a^n u[n]$ را بیابید. در این سیگنال a عددی حقیقی است.

پاسخ:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

مجموع بالا در صورتی وجود دارد که شرط $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ درست باشد؛ به عبارت دیگر در صورتی مجموع بالا وجود دارد که شرط $|z| > |a|$ درست باشد. با فرض این شرط می‌توان نوشت.

$$X(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{z}\right)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$


محدوده همگرایی
$|z| = |a|$
Real Axis
0
0
Imaginary Axis

- در مثال قبل دیدید که تبدیل z برای همه مقادیر z وجود ندارد. به محدوده ای از صفحه z که تبدیل z در آن وجود دارد، منطقه همگرایی یا ROC گفته می‌شود.
- در محاسبه تبدیل z لزوما باید ROC مشخص شود؛ زیرا تبدیل z به همراه ROC آن برگشت‌پذیر است.
- در مثال بعد سیگنالی را می‌بینید که تبدیل z یکسانی با سیگنال مثال قبل دارد ولی ROC آن‌ها متفاوت است. این تفاوت تمایز سیگنال در حوزه زمان را مشخص می‌کند.

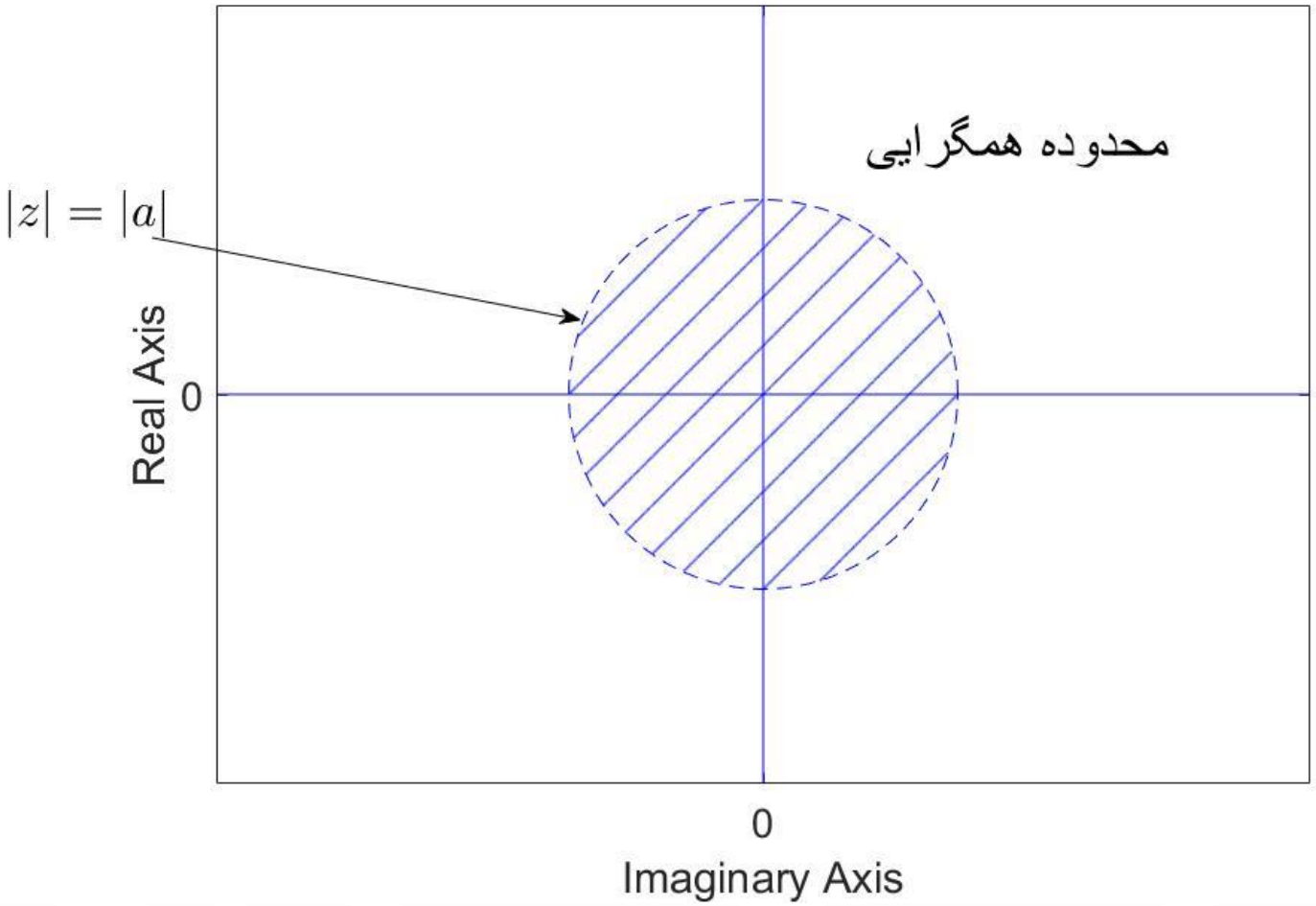
مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = -a^n u[-n-1]$ را بیابید. در این سیگنال a عددی حقیقی است.

پاسخ:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -a^k u[-k-1]z^{-k} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

مجموع بالا در صورتی وجود دارد که شرط $\left|\frac{a}{z}\right| > 1$ درست باشد؛ به عبارت دیگر در صورتی مجموع بالا وجود دارد که شرط $|z| < |a|$ درست باشد. با فرض این شرط می‌توان نوشت.

$$X(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{-k} = -\frac{\left(\frac{z}{a}\right)}{1-\left(\frac{z}{a}\right)} = -\frac{z}{a-z} = \frac{z}{z-a}$$


محدوده همگرایی
$|z| = |a|$
Real Axis
0
0
Imaginary Axis

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = \delta[n]$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k]z^{-k} = z^{-k}\Big|_{k=0} = 1$$

ROC این تبدیل شامل همه صفحه z می‌شود.

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = 2^n u[n] + (-3)^n u[-n]$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2^k u[k] + (-3)^k u[-k]\right) z^{-k}$$

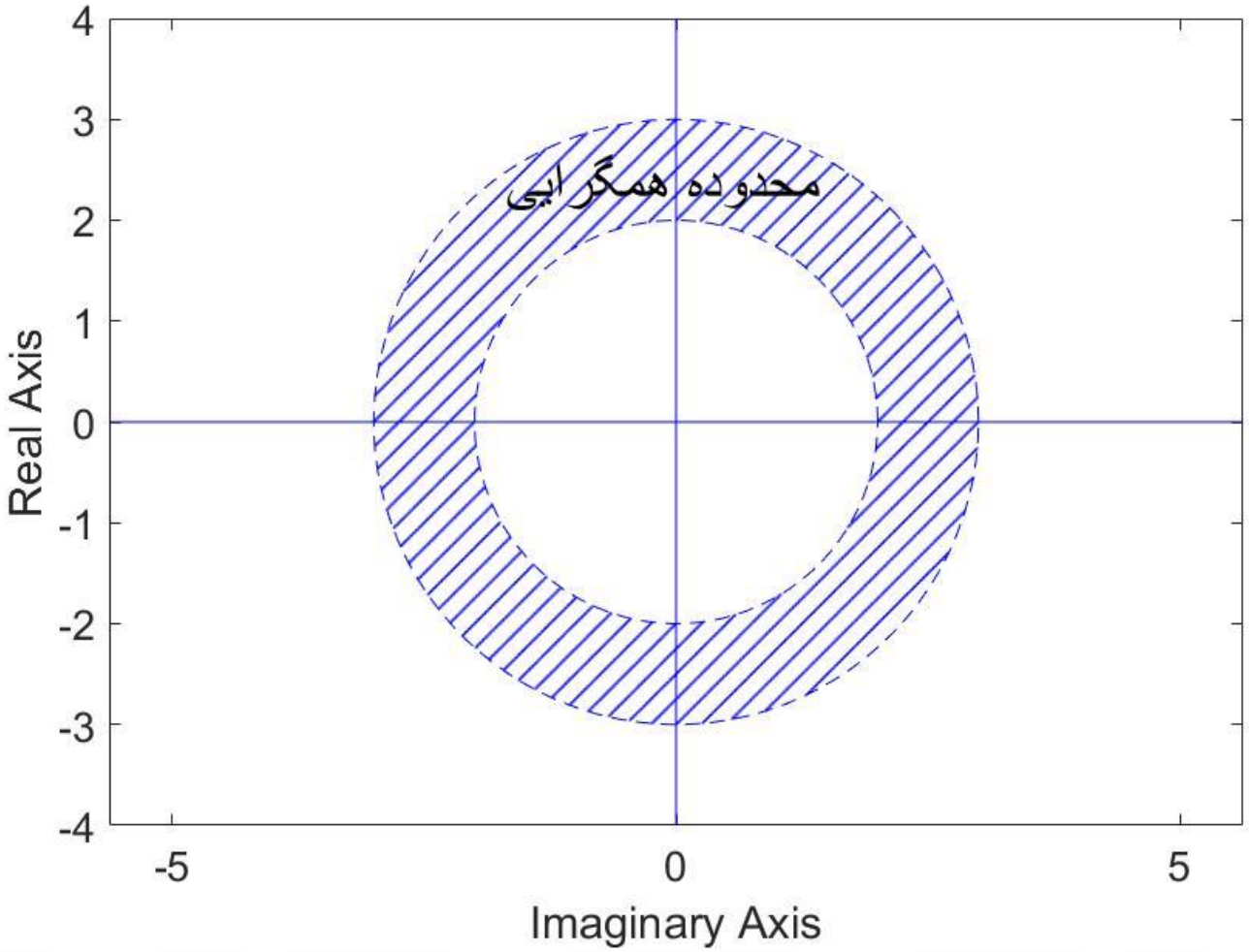
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k u[k] z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-3)^k u[-k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{0} (-3)^k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-3)^{-k} z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^k$$

شرط همگرا بودن بودن $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k$ آن است که $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ باشد؛ به عبارت دیگر $|z| > 2$ باشد. شرط همگرا بودن بودن $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^k$ آن است که $\left|-\frac{z}{3}\right| < 1$ باشد؛ به عبارت دیگر $|z| < 3$ باشد.

ROC این تبدیل، اشتراک دو شرط همگرایی $|z| > 2$ و $|z| < 3$است که به صورت $2 < |z| < 3$ است؛ بنابراین تبدیل **z** به صورت زیر خواهد بود:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} + \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{z}{z-2} + \frac{3}{z+3} = \frac{z^2+6z-6}{z^2+z-6}$$


محدوده همگرایی
Real Axis
Imaginary Axis
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = 3^n u[n] + (-2)^n u[-n]$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(3^k u[k] + (-2)^k u[-k]\right) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3^k u[k] z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-2)^k u[-k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{0} (-2)^k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-2)^{-k} z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^k$$

شرط همگرا بودن $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^k$ آن است که $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$ باشد؛ به عبارت دیگر $|z| > 3$ باشد. شرط همگرا بودن $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k$ آن است که $\left|-\frac{z}{2}\right| < 1$ باشد؛ به عبارت دیگر $|z| < 2$ باشد.

از آنجایی که دو شرط همگرایی $|z| > 3$ و $|z| < 2$ با یکدیگر همپوشانی ندارد، بنابراین ROC این تبدیل تهی است. در این حالت می‌توان بیان کرد که سیگنال $x[n] = 3^n u[n] + (-2)^n u[-n]$ تبدیل z ندارد.

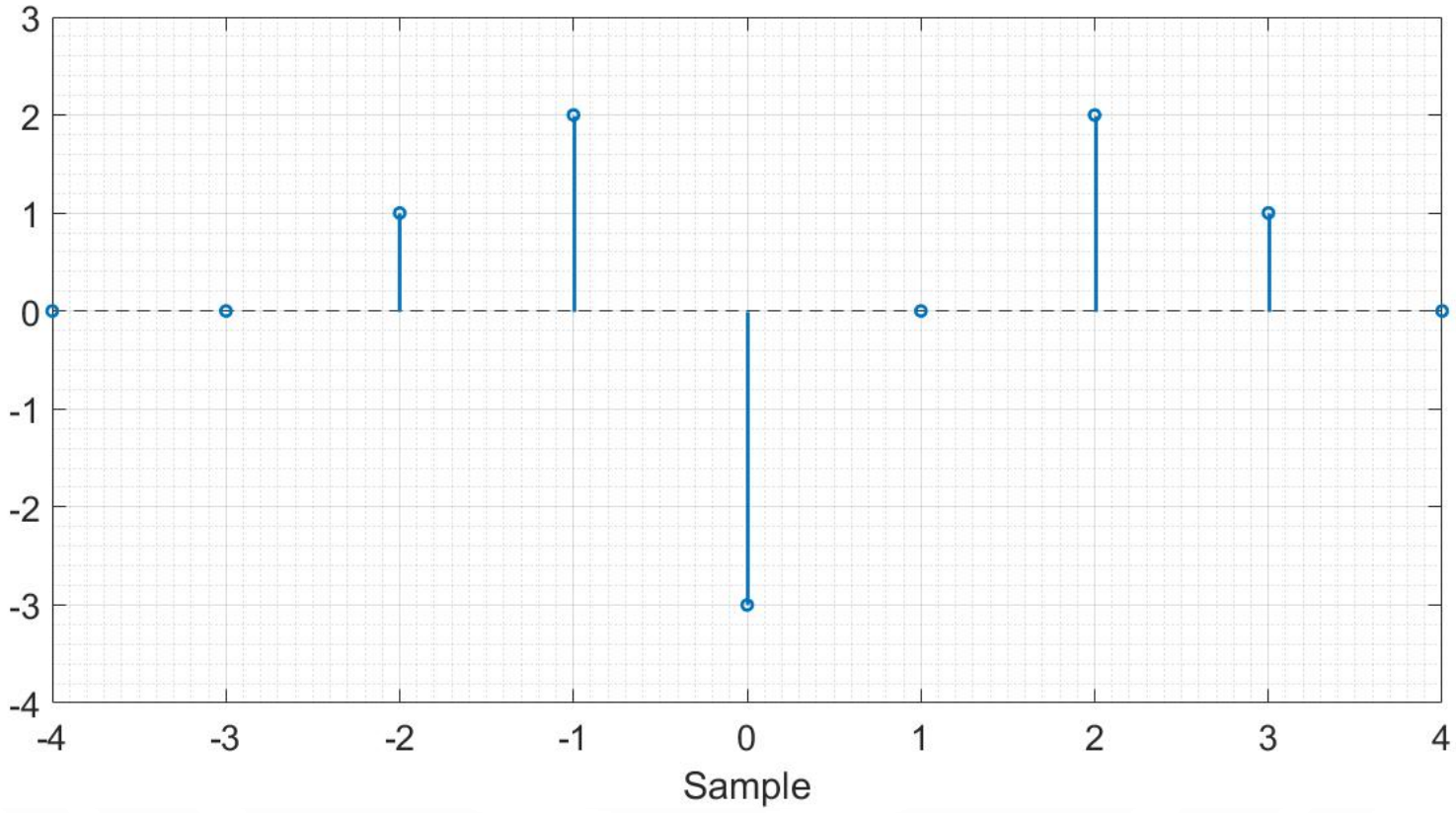
مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = \delta[n-m]$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-m]z^{-k} = z^{-m} = \left(\frac{1}{z}\right)^m$$

اگر $m > 0$ باشد، آنگاه ROC شامل همه z به جز نقطه صفر می‌شود. همچنین اگر $m < 0$ باشد، ROC شامل همه z به جز بینهایت می‌شود. نهایتا اگر $m = 0$ باشد، ROC شامل همه z می‌شود.

مثال: تبدیل z سیگنال نمایش داده شده را بیابید.



پاسخ: ابتدا ضابطه سیگنال را می‌نویسیم.

$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

حال تبدیل z را محاسبه می‌نماییم.

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta[k+2] + 2\delta[k+1] - 3\delta[k] + 2\delta[k-2] + \delta[k-3])z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k+2]z^{-k} + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k+1]z^{-k} - 3\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k]z^{-k} + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-2]z^{-k}$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-3]z^{-k} = z^2 + 2z^1 - 3 + 2z^{-2} + z^{-3}$$

ROC این تبدیل شامل همه z به جز نقطه صفر و بینهایت می‌شود.

- مثال قبل نشان داد محاسبه تبدیل z سیگنال‌هایی با تعداد محدود عناصر غیرصفر بسیار راحت است.
- برای اینکار کافی است ضرایب نقاط غیرصفر سیگنال با توان‌هایی از z را نوشت.
- این موضوع با توجه به ویژگی خطی بودن تبدیل z و رابطه اصلی قابل اثبات است.
- ROC این تبدیل شامل همه z به جز احتمالا نقطه صفر و بینهایت است. اگر سیگنال در نمونه‌های مثبت مقدار غیرصفر داشته باشد، ROC شامل نقطه صفر نخواهد بود. اگر سیگنال در نمونه‌های منفی مقدار غیرصفر داشته باشد، ROC شامل بینهایت نخواهد بود.

صفرها و قطب‌های سیگنال در صفحه Z

- معمولا می‌توان سیگنال $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ را به فرم یک تابع کسری نوشت؛ به عبارت دیگر

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i z^i} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^n + b_{m-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

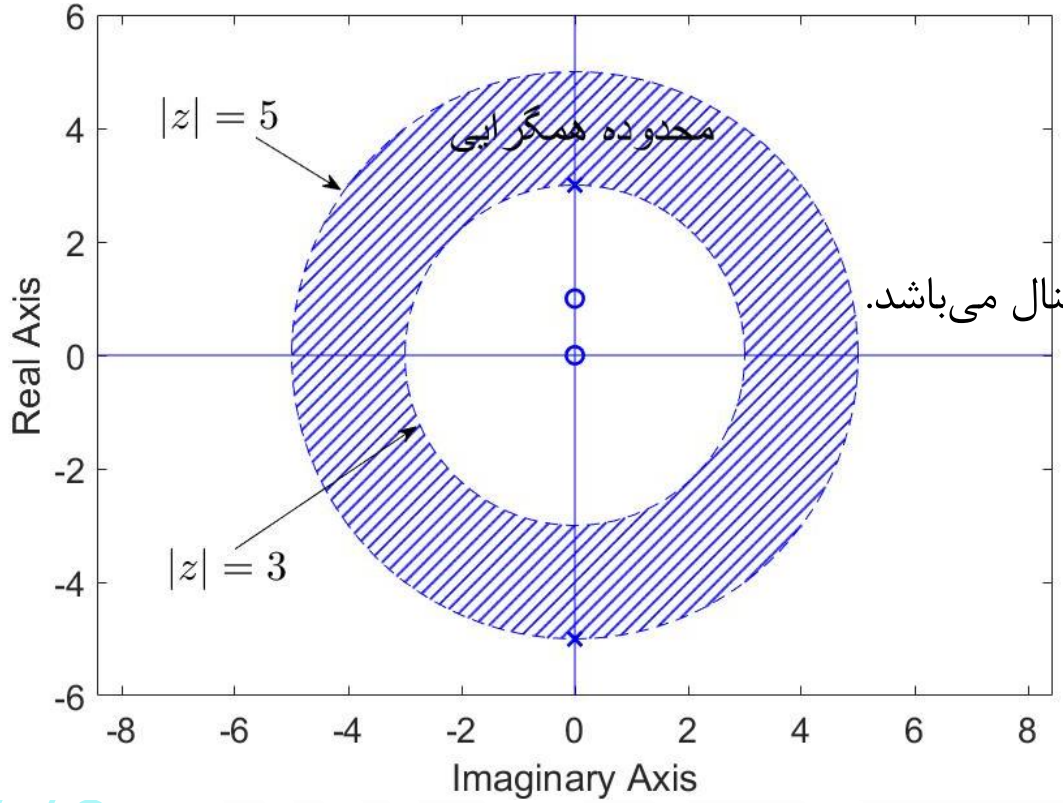
- صورت و مخرج این کسر چندجمله‌ای‌هایی با درجه m و n است. همانطور که می‌دانید هر چندجمله‌ای درجه k دارای k ریشه است؛ بنابراین سیگنال $X(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(z) = k\frac{(z - z_m)(z - z_{m-1}) \dots (z - z_2)(z - z_1)}{(z - p_n)(z - p_{n-1}) \dots (z - p_2)(z - p_1)}$$

- به نقاط $z = z_i, 1 \leq i \leq m$ صفرهای سیگنال گفته می‌شود. این نقاط از حل معادله $X(z) = 0$ بدست می‌آید.
- همچنین به نقاط $z = P_i, 1 \leq i \leq n$ قطب‌های سیگنال گفته می‌شود. این نقاط مخرج کسر $X(z)$ را صفر می‌کند.
- به صورت قراردادی نقاط قطب در صفحه z را با علامت $\times$ ، و نقاط صفر در صفحه z را با o نمایش می‌دهند.

مثال: سیگنال $3 < |z| < 5$، $X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 2z - 15}$ را در نظر بگیرید. قطب‌ها و صفرهای آن را محاسبه و در صفحه z نمایش دهید.

پاسخ:



$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 2z - 15} = \frac{z(z-1)}{(z-3)(z+5)}$$

بنابراین $z = 0$ و $z = 1$ صفرهای سیگنال، و $z = 3$ و $z = -5$ قطب‌های سیگنال می‌باشد.

مثال: نقشه قطب و صفر تبدیل z سیگنال زیر را بیابید.

$$x[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \le n \le 7 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

پاسخ:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{7} 2^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{7} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{2}{z}\right)^8}{1-\left(\frac{2}{z}\right)} = \frac{z^8-2^8}{z^8-2z^7} = \frac{z^8-2^8}{z^7(z-2)}$$

این تبدیل شامل قطب مرتبه هفتم در نقطه $z = 0$ و قطب ساده در $z = 2$ است.

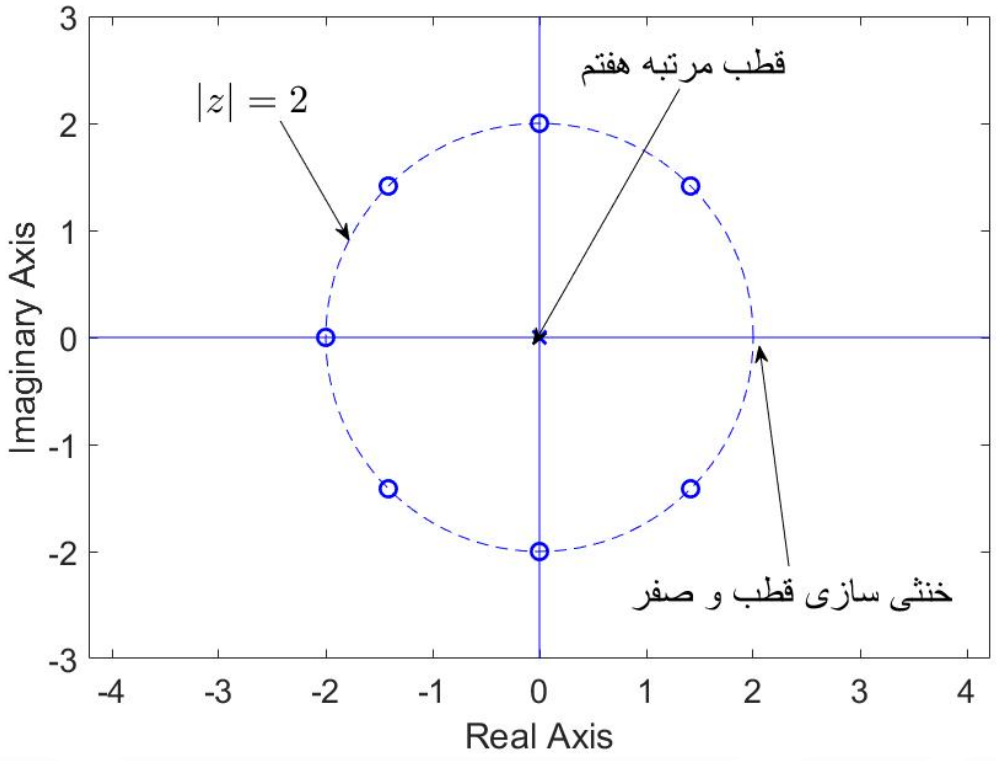
برای محاسبه صفرهای تابع تبدیل باید معادله $z^8 = 2^8$ حل شود. حل این معادله به صورت زیر است:

$$z = 2e^{\frac{j2\pi k}{8}}, k = 0,1,2,\dots,7$$

بنابراین این تابع دارای صفرهای $z = 2$، $z = 2e^{\frac{j\pi}{4}}$، $z = 2e^{\frac{j\pi}{2}}$، $z = 2e^{\frac{j3\pi}{4}}$، $z = 2e^{j\pi}$، z $= 2e^{\frac{j5\pi}{4}}$، $z = 2e^{\frac{j3\pi}{2}}$ و $z = 2e^{\frac{j7\pi}{4}}$ است.

تبدیل z سیگنال دارای یک قطب و یک صفر در $z = 2$ است؛ بنابراین آن‌ها اثر یکدیگر را خنثی کرده و از لیست قطب‌ها و صفرها حذف می‌شود.

ROC این تبدیل شامل همه صفحه z به جز نقطه صفر است؛ به عبارت دیگر ROC به صورت $|z| > 0$ است. اگر $z = 0$ باشد حاصل‌جمع بالا نامحدود خواهد بود.



ویژگی‌های ROC

سیگنال $x(t)$ با تبدیل z به صورت $X(z)$ را در نظر بگیرید. برای ROC متناظر با $X(z)$ ویژگی‌های بعدی را می‌توان متصور شد.

- ویژگی ۱: ناحیه همگرایی $\boldsymbol{X(z)}$ در صفحه $\mathbf{z}$ شامل دایره‌هایی به مرکز مبدا مختصات است.
- ویژگی ۲: ROC شامل هیچ قطبی نمی‌شود.

- در مثال $x[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \le n \le 7 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$ انتظار داشتیم که ROC شامل قطب $z = 2$ نباشد که اینگونه نبود. اگر $z = 2$ باشد، حاصل‌جمع به صورت زیر خواهد بود که محدود است.

$$X(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]2^{-k} = \sum_{k=0}^{7} 2^k 2^{-k} = \sum_{k=0}^{7} 1 = 8$$

- علت امر آن است که تبدیل z این سیگنال دارای یک صفر در نقطه $z = 2$ است. در اینصورت گفته می‌شود که صفر اثر قطب را خنثی کرده است.

ویژگی ۳

- **اگر $x(t)$ سیگنالی با عرض محدود باشد، آنگاه ناحیه همگرایی کل صفحه z به جز احتمالا نقطه صفر و بینهایت خواهد بود.**
- هر سیگنال زمان گسسته را می‌توان به صورت مجموع ضربه‌های مقیاس شده و انتقال یافته نوشت؛ بنابراین ناحیه همگرایی شامل همه صفحه z به جز احتمالا نقطه صفر و بینهایت است.
- اگر سیگنال در نمونه‌های مثبت مقدار غیرصفر داشته باشد، ROC شامل نقطه صفر نخواهد بود.
- اگر سیگنال در نمونه‌های منفی مقدار غیرصفر داشته باشد، ROC شامل بینهایت نخواهد بود.

- ویژگی ۴: اگر $x[n]$ یک سیگنال دست راستی باشد (یعنی $x[n] = 0, n < N_0$) آنگاه ROCبه شکل $|z| > |r_{max}|$ یا $|r_{max}| < |z| < +\infty$ خواهد بود که $|r_{max}|$ بزرگترین قطب سیگنال است.

- ویژگی ۵: اگر $x[n]$ یک سیگنال دست چپی باشد (یعنی $x[n] = 0, n \geq N_0$)، آنگاه ROC به شکل $|z| < |r_{min}|$ یا $0 < |z| < |r_{min}|$ خواهد بود که r کوچکترین قطب سیگنال است.

- ویژگی ۶: اگر $x(t)$سیگنال دوطرفه باشد (از دو طرف تا بینهایت ادامه داشته باشد) آنگاه ناحیه همگرایی به صورت $|r_0| < z < |r_1|$ خواهد بود.

ویژگی‌های تبدیل Z

سیگنال در حوزه زمان	سیگنال در حوزه z	ROC	
$x[n]$	$X(z)$	$\boldsymbol{R}$	
$x_1[n]$	$X_1(z)$	$\boldsymbol{R_1}$	
$x_2[n]$	$X_2(z)$	$\boldsymbol{R_2}$	
$a_1x_1(t)+a_1x_2(t)$	$a_1X_1(z)+a_1X_2(z)$	$(\boldsymbol{R_1}\cap\boldsymbol{R_2})\subseteq \boldsymbol{ROC}$	ویژگی خطی بودن
$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$\left(\boldsymbol{R}\cap(\boldsymbol{0}<\lvert\boldsymbol{z}\rvert<+\infty)\right)\subseteq \boldsymbol{ROC}$	ویژگی انتقال در زمان
$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}}$	ویژگی معکوس زمانی
$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-z^{-1}\right)X(z)$	$\left(\boldsymbol{R}\cap(\lvert\boldsymbol{z}\rvert>\boldsymbol{0})\right)\subseteq \boldsymbol{ROC}$	ویژگی تفاضل در حوزه زمان
$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	$\boldsymbol{R}$	ویژگی ضرب سیگنال در n
$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\lvert\boldsymbol{z_0}\rvert\boldsymbol{R}$	ویژگی ضرب سیگنال در $\boldsymbol{z_0^n}$
$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X\left(e^{-j\Omega_0}z\right)$	$\boldsymbol{R}$	ویژگی ضرب سیگنال در $\boldsymbol{e^{j\Omega n}}$
$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$(\boldsymbol{R_1}\cap\boldsymbol{R_2})\subseteq \boldsymbol{ROC}$	ویژگی کانولوشن در حوزه زمان

مثال: تبدیل z سیگنال $x[\mathrm{n}] = 3nu[n] + 2^{n+2}u[-n-1]$ را محاسبه نمایید.

پاسخ: بر اساس جدول تبدیل z و ویژگی خطی بودن تبدیل z می‌توان نوشت.

$$x_1[n] = nu[n] \Rightarrow X_1(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

$$x_2[n] = -2^n u[-n-1] \Rightarrow X_2(z) = \frac{z}{z-2}, |z| < 2$$

$$\mathcal{Z}\{3x_1[n] - 4x_2[n]\} = 3X_1(z) - 4X_2(z) = \frac{3z}{(z-1)^2} - \frac{4z}{z-2}$$

ROC تبدیل z حداقل شامل $1 < |z| < 2$ است ولی معمولا به صورت $1 < |z| < 2$ در نظر گرفته می‌شود.

مثال: تبدیل z سیگنال $x[n] = 3n.u[n-2]$ را بیابید.

پاسخ:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$\mathcal{Z}\{u[n-2]\} = z^{-2}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2 - z}, |z| > 1$$

$$\mathcal{Z}\{n.u[n-2]\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2 - z}\right) = -z\frac{-2z+1}{(z^2-z)^2} = \frac{z(2z-1)}{(z^2-z)^2} = \frac{2z-1}{z(z-1)^2}, |z| > 1$$

$$\mathcal{Z}\{3n.u[n-2]\} = 3\frac{2z-1}{z(z-1)^2}, |z| > 1$$

تئوری مقدار اولیه سیگنال

- اگر سیگنال $x[n]$ به صورت زیر باشد،

$$x[n] = 0, \qquad n < 0$$

- و تبدیل z آن به صورت زیر باشد،

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}, ROC = R$$

- آنگاه مقدار اولیه سیگنال به صورت زیر خواهد بود:

$$x[0] = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$

تئوری مقدار اولیه سیگنال (ادامه)

اثبات:

$$\lim_{z\to+\infty} X(z) = \lim_{z\to+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}\right) = \lim_{z\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x[k]z^{-k}\right)$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left(x[0]z^{0} + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots\right) = x[0]$$

تبدیل Z معکوس

- تبدیل z معکوس تبدیلی است که یک سیگنال در حوزه z را به حوزه زمان می‌برد. تبدیل z معکوس به فرم زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x[n]$$

- تبدیل z معکوس از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- که در آن c محدوده انتگرال‌گیری است. محاسبه تبدیل z معکوس از این طریق نیازمند دانش کافی در حوزه انتگرال اعداد مختلط است. پرداختن به جزییات این موضوع از اهداف این درس نیست.

مثال: تبدیل z معکوس سیگنال $X(z) = -3z^2 + 7z^1 + 9 - 5z^{-2}, 0 < |z| < +\infty$ را بیابید.

پاسخ:

رابطه تبدیل z به صورت زیر است.

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$$
$$= \cdots + x[-3]z^3 + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \cdots$$

با جایگزینی سیگنال در تعریف بالا می‌توان نوشت:

$$-3z^2 + 7z^1 + 9 - 5z^{-2}$$
$$= \cdots + x[-3]z^3 + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \cdots$$

برای آنکه رابطه قبل برای همه z ها درست باشد، باید ضرایب توان‌های مختلف z در دو طرف تساوی یکسان باشد؛ به عبارت دیگر

$$x[-2] = -3, \qquad x[-1] = 7, \qquad x[0] = 9, \qquad x[2] = -5,$$

و بقیه ضرایب سیگنال $x[n]$ نیز باید صفر باشد. بنابراین می‌توان سیگنال $x[n]$ را به صورت زیر نوشت:

$$x[n] = -3\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 9\delta[n] - 5\delta[n-2]$$

مثال: تبدیل z معکوس سیگنال $X(z) = z^{-1}(z-1)\left(2-\frac{1}{z}\right), 0 < |z|$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(z) = z^{-1}(z-1)\left(2-\frac{1}{z}\right) = \left(1-\frac{1}{z}\right)\left(2-\frac{1}{z}\right) = 2-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2} = 2-3z^{-1}+z^{-2}$$

بنابراین می‌توان سیگنال $x[n]$ را به صورت زیر نوشت:

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

مثال: تبدیل z معکوس سیگنال زیر را بیابید.

$$X(z) = \frac{6z}{6z^2 - 5z + 1}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & 6z^2 - 5z + 1 \\ \hline
6z & z^{-1} + \frac{5}{6}z^{-2} + \frac{19}{36}z^{-3} + \frac{65}{216}z^{-4} + \cdots \\
-(6z - 5 + z^{-1}) & \\ \hline
5 - z^{-1} & \\
-\left(5 - \frac{25}{6}z^{-1} + \frac{5}{6}z^{-2}\right) & \\ \hline
\frac{19}{6}z^{-1} - \frac{5}{6}z^{-2} & \\
-\left(\frac{19}{6}z^{-1} - \frac{95}{36}z^{-2} + \frac{19}{36}z^{-3}\right) & \\ \hline
\frac{65}{36}z^{-2} - \frac{19}{36}z^{-3} & \\
-\left(\frac{65}{36}z^{-2} - \frac{325}{216}z^{-3} + \frac{65}{216}z^{-4}\right) & \\ \hline
\frac{211}{216}z^{-3} - \frac{65}{216}z^{-4} &
\end{array}$$

پاسخ: باید کسر $X(z)$ را به صورت توان‌هایی از z گسترش دهیم. با توجه به آنکه ROC به صورت $|z| > \frac{1}{2}$ است، بنابراین سیگنال $x[n]$ یک سیگنال دست راستی است. در مواردی که سیگنال دست راستی است کسر را باید با توان‌های منفی z گسترش داد. با تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم:

بنابراین سیگنال $X(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(z) = z^{-1} + \frac{5}{6}z^{-2} + \frac{19}{36}z^{-3} + \frac{65}{216}z^{-4} + \cdots$$

پس $x[n]$ به صورت زیر است.

$$x[n] = \delta[n-1] + \frac{5}{6}\delta[n-2] + \frac{19}{36}\delta[n-3] + \frac{65}{216}\delta[n-4] + \cdots$$

مثال: تبدیل z معکوس سیگنال زیر را بیابید.

$$X(z) = \frac{6z}{6z^2 - 5z + 1}, |z| < \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & 1 - 5z + 6z^2 \\ \hline
6z & 6z + 5z^2 - 11z^3 - 85z^4 + \cdots \\
-(6z - 5z^2 + 36z^3) & \\ \hline
5z^2 - 36z^3 & \\
-(5z^2 - 25z^3 + 30z^4) & \\ \hline
-11z^3 - 30z^4 & \\
-(-11z^3 + 55z^4 - 66z^5) & \\ \hline
-85z^4 + 66z^5 & \\
-(-85z^4 + 425z^5 - 510z^6) & \\ \hline
-359z^5 + 510z^6 &
\end{array}$$

پاسخ: باید کسر $X(z)$ را به صورت توان‌هایی از z گسترش دهیم. با توجه به آنکه ROC به صورت $|z| < \frac{1}{3}$ است، بنابراین سیگنال $x[n]$ یک سیگنال دست چپی است. در مواردی که سیگنال دست چپی است کسر را باید با توان‌های مثبت z گسترش داد. با تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم:

بنابراین سیگنال $X(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(z) = 6z + 5z^2 - 11z^3 - 85z^4 + \cdots$$

پس $x[n]$ به صورت زیر است.

$$x[n] = 6\delta[n+1] + 5\delta[n+2] - 11\delta[n+3] - 85\delta[n+4] + \cdots$$

- اشکال روش استفاده شده در مثال‌های قبل آن است که محاسبه همه سیگنال در حوزه زمان دشوار است. همچنین رابطه ریاضی سیگنال نیز محاسبه نمی‌شود.

محاسبه تبدیل Z معکوس به کمک تجزیه به کسرهای جزئی

- معمولا می‌توان سیگنال $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ را به فرم یک تابع کسری نوشت. با تفکیک تابع کسری به کسرهای جزئی و استفاده از جدول تبدیل z می‌توان عکس تبدیل z را محاسبه کرد.
- در تبدیل z معکوس معمولا به جای تفکیک کسر $X(z)$ کسر $\frac{X(z)}{z}$ را تفکیک می‌کنند. برای تفکیک کسر به کسرهای جزئی روش‌های مختلفی وجود دارد.

محاسبه تبدیل Z معکوس به کمک تجزیه به کسرهای جزئی (ادامه)

- اگر درجه چندجمله‌ای صورت کمتر از مخرج باشد، دو حالت ممکن است رخ دهد.
  - ✓همه قطب‌ها ساده باشند.
  - ✓قطب‌ها چندگانه باشند.
- کسر $\frac{X(z)}{z}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\frac{X(z)}{z} = k\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)} = k\frac{(z-z_m)(z-z_{m-1})\dots(z-z_2)(z-z_1)}{(z-p_n)(z-p_{n-1})\dots(z-p_2)(z-p_1)}$$

محاسبه تبدیل Z معکوس به کمک تجزیه به کسرهای جزئی (ادامه)

- اگر همه قطب‌ها ساده باشند، کسر $\frac{X(z)}{z}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(z-p_i)} = \frac{c_n}{(z-p_n)} + \frac{c_{n-1}}{(z-p_{n-1})} + \cdots + \frac{c_1}{(z-p_1)}$$

- که در آن

$$c_i = \lim_{s \to p_i} (z-p_i) \frac{X(z)}{z}$$

محاسبه تبدیل Z معکوس به کمک تجزیه به کسرهای جزئی (ادامه)

- اگر کسر قطب‌های چندگانه باشد، کسرهایی با توان‌های مختلف به صورت زیر برای آن‌ها قرار می‌دهیم. فرض کنید مخرج کسر شامل فاکتور $(z-p_i)^r$ باشد. در اینصورت کسر $\frac{X(z)}{z}$ به خاطر قطب p_i شامل فاکتورهای زیر است:

$$\frac{\lambda_{r-1}}{(z-p_i)}+\frac{\lambda_{r-2}}{(z-p_i)^2}+\cdots+\frac{\lambda_0}{(z-p_i)^r}$$

- که در آن

$$\lambda_k=\frac{1}{k!}\lim_{z\to p_i}\left(\frac{d^k}{dz^k}F(z)\right), k=0,\dots,r-1$$

$$F(z)=(z-p_i)^r\frac{X(z)}{z}$$

مثال: تبدیل z معکوس $X(z) = \frac{z+2}{z^2+z-6}$ را در هر یک از حالت‌های زیر بیابید.

الف: $|z| > 2$ ب: $|z| < -3$ ج: $-3 < |z| < 2$

پاسخ: در هر سه حالت، مراحل تا تفکیک به کسرهای جزئی آن یکسان است.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{z(z^2+z-6)} = \frac{z+2}{z(z-2)(z+3)}$$

قطب‌های $\frac{X(z)}{z}$ به صورت $p_1 = 2$ و $p_2 = -3$ و $p_3 = 0$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{z(z-2)(z+3)} = \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z+3} + \frac{c_3}{z}$$

$$c_1 = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z+2}{z(z-2)(z+3)} = \lim_{z\to 2}\frac{z+2}{z(z+3)} = \frac{2}{5}$$

$$c_2 = \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{z+2}{z(z-2)(z+3)} = \lim_{z\to -3}\frac{z+2}{z(z-2)} = -\frac{1}{15}$$

$$c_3 = \lim_{z\to 0}(z)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 0}(z)\frac{z+2}{z(z-2)(z+3)} = \lim_{z\to 0}\frac{z+2}{(z-2)(z+3)} = -\frac{1}{3}$$

بنابراین $\frac{X(z)}{z}$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{2}{5}}{z-2} - \frac{\frac{1}{15}}{z+3} - \frac{\frac{1}{3}}{z}$$

سیگنال $X(z)$ به صورت زیر است.

$$X(z) = \frac{\frac{2}{5}z}{z-2} - \frac{\frac{1}{15}z}{z+3} - \frac{1}{3}$$

پاسخ الف: با توجه به آنکه $|z| > 2$ است، داریم:

$$x[n] = \frac{2}{5}2^n u[n] - \frac{1}{15}(-3)^n u[n] - \frac{1}{3}\delta[n]$$

پاسخ ب: با توجه به آنکه $|z| < -3$ است، داریم:

$$x[n] = -\frac{2}{5}2^n u[-n-1] + \frac{1}{15}(-3)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\delta[n]$$

پاسخ ج: با توجه به آنکه $-3 < |z| < 2$ است، داریم:

$$x[n] = -\frac{2}{5}2^n u[-n-1] - \frac{1}{15}(-3)^n u[n] - \frac{1}{3}\delta[n]$$

مثال: تبدیل z معکوس $X(z) = \frac{2+2z^{-2}+2z^{-1}}{z-1}, |z| > 1$ را بیابید.

پاسخ غلط: می‌توان سیگنال $\frac{X(z)}{z}$ را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2 + 2z^{-2} + 2z^{-1}}{z(z-1)}$$

$p_0 = 0$ و $P_1 = 1$ قطب‌های کسر $\frac{X(z)}{z}$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2 + 2z^{-2} + 2z^{-1}}{z(z-1)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-1}$$

مجهولات را محاسبه می‌نماییم:

$$c_1 = \lim_{z \to 0} z \left(\frac{2 + 2z^{-2} + 2z^{-1}}{z(z-1)} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{2 + 2z^{-2} + 2z^{-1}}{z-1} = \infty$$

- همه مجهولات اعدادی غیر بینهایت باید باشند. علت غلط بودن پاسخ آن است که در صورت و مخرج کسر، توان منفی نباید وجود داشته باشد.
- همچنین دقت کنید قطب‌ها نیز به درستی تشخیص داده نشده‌اند.
- **پاسخ درست:** می‌توان سیگنال $X(z)$ و $\frac{X(z)}{z}$ را به صورت زیر نوشت.

$$X(z) = \frac{2 + 2z^{-2} + 2z^{-1}}{z - 1} = \frac{2z^2 + 2 + 2z}{z^2(z-1)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 + 2z + 2}{z^3(z-1)}$$

ادامه پاسخ درست به عهده شما

تابع سیستم

- همانطور که در فصل دوم اشاره شد، خروجی $y[n]$ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ نسبت به ورودی $x[n]$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- با گرفتن تبدیل z از دو طرف تساوی به رابطه زیر می‌رسیم.

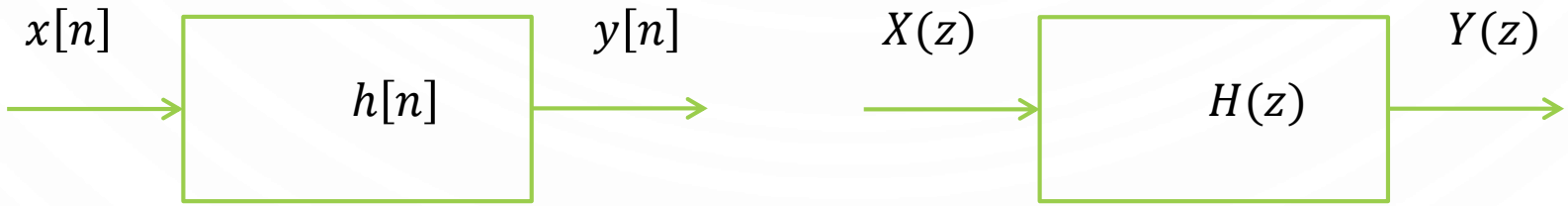
$$Y(z) = X(z)H(z)$$

- به $H(z)$ تابع سیستم یا تابع انتقال گفته می‌شود که تبدیل z پاسخ ضربه $h[n]$ است.

تابع سیستم (ادامه)

- تابع سیستم به صورت نسبت تبدیل z خروجی سیستم به تبدیل z ورودی آن است؛ به عبارت دیگر

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



مثال: خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = a^n u[n]$ و ورودی $x[n] = a^n u[n]$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$H(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$Y(z) = H(z).X(z) = \frac{z^2}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

کسر $\frac{Y(z)}{z}$ را محاسبه و آنرا به کسرهای جزئی تفکیک می‌کنیم.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)^2} = \frac{\lambda_1}{z-a} + \frac{\lambda_0}{(z-a)^2}$$

$$F(z) = (z-a)^2 \frac{z}{(z-a)^2} = z$$

$$\frac{d}{dz} F(z) = 1$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{0!}\lim_{z\to a}\big(F(z)\big) = \lim_{z\to a}(z) = a$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}F(z)\right) = \lim_{z\to a} 1 = 1$$

بنابراین کسر $\frac{Y(z)}{z}$ و $Y(z)$ به صورت زیر است.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-a} + \frac{a}{(z-a)^2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{az}{(z-a)^2}$$

بنابراین خروجی به صورت زیر است.

$$y[n] = a^n u[n] + n.a^n u[n]$$

ادامه مثال

تابع $F(z)$ و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجهولات را محاسبه می‌کنیم.

$$F(z) = (z-5)^2 \frac{5}{z(z-3)(z-5)^2} = \frac{5}{z(z-3)}$$

$$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{-5(2z-3)}{z^2(z-3)^2} = -\frac{10z-15}{z^2(z-3)^2}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{0!}\lim_{z\to 5} F(z) = \lim_{z\to 5}\left(\frac{5}{z(z-3)}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 5}\frac{d}{dz}F(z) = \lim_{z\to 5}\left(-\frac{10z-15}{z^2(z-3)^2}\right) = -\frac{7}{20}$$

$$c_1 = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{5}{z(z-3)(z-5)^2} = \lim_{z\to 3}\frac{5}{z(z-5)^2} = \frac{5}{12}$$

$$c_2 = \lim_{z\to 0}(z)\frac{5}{z(z-3)(z-5)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{5}{(z-3)(z-5)^2} = -\frac{1}{15}$$

کسر $\frac{H(z)}{z}$ و $H(z)$ به صورت زیر است.

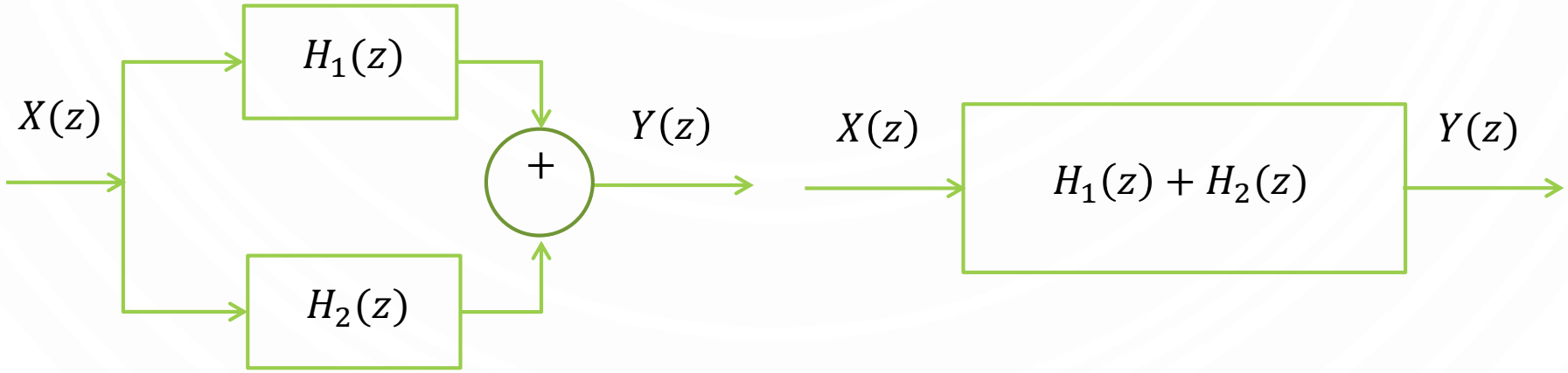
$$\frac{H(z)}{z} = -\frac{\frac{1}{15}}{z} + \frac{\frac{5}{12}}{z-3} - \frac{\frac{7}{20}}{z-5} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-5)^2}$$

$$H(z) = -\frac{1}{15} + \frac{\frac{5}{12}z}{z-3} - \frac{\frac{7}{20}z}{z-5} + \frac{\frac{1}{2}z}{(z-5)^2}$$

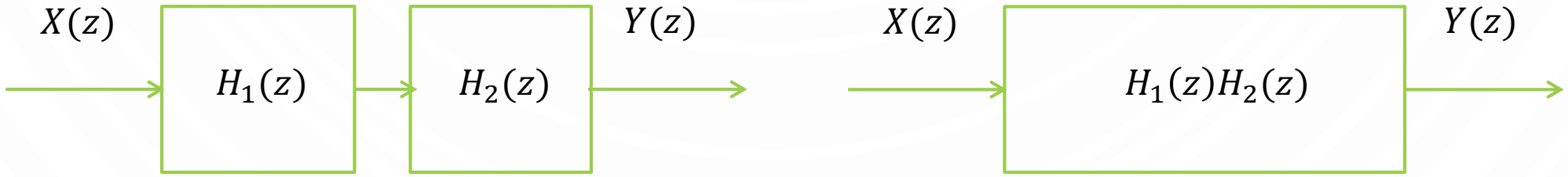
بنابراین پاسخ ضربه با توجه $|z| > 5$ به صورت زیر است.

$$h[n] = -\frac{1}{15}\delta[n] + \frac{5}{12}(3)^n u[n] - \frac{7}{20}(5)^n u[n] + \frac{1}{10}n(5)^n u[n]$$

- اگر بخواهیم سیستم‌های LTI موازی را به کمک تابع سیستم مدل کنیم، تابع سیستم به صورت مجموع توابع زیر سیستم‌ها خواهد بود. این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است.



- اگر بخواهیم سیستم‌های LTI سری را به کمک تابع سیستم مدل کنیم، تابع سیستم به صورت حاصلضرب توابع زیر سیستم‌ها خواهد بود. این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است.



ویژگی‌های سیستم‌های LTI: علّی و غیرعلّی بودن

- سیستم علّی به سیستمی گفته می‌شود که پاسخ آن به یک ورودی، فقط به ورودی و ورودی‌های گذشته سیستم بستگی داشته باشد. یک سیستم LTI گسسته در زمان علی است اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$h[n] = 0, n < 0$$

- به عبارت دیگر، پاسخ ضربه یک سیستم علی در لحظات قبل صفر، مقدار صفر دارد. با توجه به دست راستی بودن سیگنال پاسخ ضربه و ویژگی‌های ناحیه همگرایی، ROC تبدیل z سیستم علی با تابع سیستم $H(z)$ باید به فرم $|z| > |r_m|$ باشد؛ به عبارت دیگر، ناحیه همگرایی باید بیرون قطب‌ها باشد.

ویژگی‌های سیستم‌های LTI: پایداری

- همانطور که قبلاً بیان شد، برای پایداری یک سیستم زمان گسسته LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ باید رابطه زیر برای آن صادق باشد.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty$$

- به عبارت دیگر، شرط پایداری آن است که مجموع اندازه پاسخ ضربه محدود باشد.
- شرط پایداری آن است که ناحیه همگرایی شامل دایره واحد باشد؛ به عبارت دیگر $(|z| = 1) \subseteq ROC$ باشد.

حل سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات تفاضلی

- یک معادله تفاضلی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- که در آن a_k و b_k ضرایب حقیقی ثابت هستند و لزوماً $a_N \neq 0$.
- اگر رابطه بالا را از حوزه زمان به حوزه z ببریم، به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

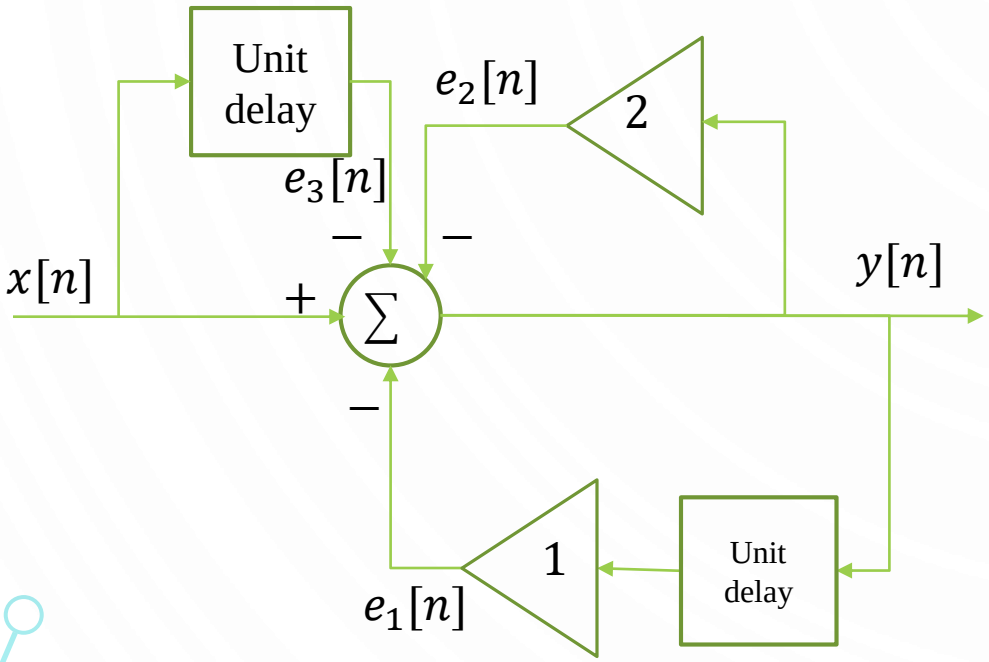
حل سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات تفاضلی (ادامه)

- بنابراین می‌توان نوشت:

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

مثال: پاسخ ضربه سیستم علی زیر را بیابید. فرض کنید $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ باشد.



پاسخ:

$$y[n] = x[n] - e_1[n] - e_2[n] - e_3[n]$$

$$\xRightarrow{e_1[n]=y[n-1]} y[n] = x[n] - y[n-1] - e_2[n] - e_3[n]$$

$$\xRightarrow{e_2[n]=2y[n]} y[n] = x[n] - y[n-1] - 2y[n] - e_3[n]$$

$$\xRightarrow{e_3[n]=x[n-1]} y[n] = x[n] - y[n-1] - 2y[n] - x[n-1]$$

بنابراین

$$y[n-1] + 3y[n] = x[n] - x[n-1]$$

معادله تفاضلی توصیف کننده سیستم به صورت زیر است.

$$y[n-1]+3y[n]=x[n]-x[n-1]$$

$$\Rightarrow z^{-1}Y(z)+3Y(z)=X(z)-z^{-1}X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)\left(z^{-1}+3\right)=X(z)\left(1-z^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(z^{-1}+3\right)}=\frac{z-1}{3z+1}=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{z-1}{z+\frac{1}{3}}$$

کسر $\frac{H(z)}{z}$ را محاسبه و به کسرهای جزئی تفکیک می‌کنیم.

$$\frac{H(z)}{z}=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{z-1}{z\left(z+\frac{1}{3}\right)}=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z+\frac{1}{3}}$$

$$c_1 = \lim_{z\to 0} z\left(\frac{1}{3}\right)\frac{z-1}{z\left(z+\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)\lim_{z\to 0}\frac{z-1}{z+\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = -1$$

$$c_2 = \lim_{z\to -\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\frac{z-1}{z\left(z+\frac{1}{3}\right)} = \lim_{z\to -\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)\frac{z-1}{z} = \frac{1}{3}\left(\frac{-\frac{1}{3}-1}{-\frac{1}{3}}\right) = \frac{4}{3}$$

بنابراین کسر $\frac{H(z)}{z}$ و $H(z)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{H(z)}{z} = -\frac{1}{z} + \frac{4}{3}\frac{1}{z+\frac{1}{3}}$$

$$H(z) = -1 + \frac{4}{3}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

با توجه به آنکه سیستم علی است، ناحیه همگرایی پاسخ ضربه به فرم $|z| > r$ است؛ بنابراین پاسخ ضربه به صورت زیر است.

$$h[n] = -\delta[n] + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

تبدیل Z یک طرفه

- تبدیل z یک طرفه نوع خاصی از تبدیل z است که حدود جمع آن از 0 تا $+\infty$ است؛ به عبارت دیگر

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]z^{-k}$$

- این تبدیل بخش زمان‌های منفی سیگنال $x[n]$ را نظر نمی‌گیرد؛ بنابراین می‌توان $x[n]$ را به صورت یک سیگنال دست راستی در نظر گرفت. از اینرو ناحیه همگرایی آن به صورت $|z| > r$ است.
- تبدیل z یک طرفه و تبدیل z برای سیگنال‌هایی به فرم $x[n]u[n]$ یکسان است.
- بیشتر سیگنال‌های واقعی به این فرم هستند.

کدهای MATLAB

- ۴- ۱۱- ۱- دستور ztrans
- ۴- ۱۱- ۲- دستور iztrans

دستور ZTRANS

- این دستور برای محاسبه تبدیل z یک طرفه تابع مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید می‌خواهیم تبدیل z یک طرفه سیگنال $x[n] = 2^n$ را محاسبه نماییم. به کمک کد زیر این موضوع امکان‌پذیر است.

```
>> syms n z
>> f=2^n;
>> ztrans(f,n,z)
ans =
z/(z - 2)
```

این کد تبدیل z را به صورت $F(z) = \frac{z}{z-2}$ محاسبه می‌کند. برای توابع پله و ضربه به ترتیب می‌توان از دستورات heaviside و dirac استفاده کرد.

مثال: کدی بنویسید که تبدیل z یکطرفه $f[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-7]$ را محاسبه کند.

پاسخ:

```
>> syms n z
>> f=((1/5)^n)*heaviside(n-7);
>> ztrans(f,n,z)
ans =
(1/(390625*(z - 1/5)) + 1/78125)/z^7
```

تبدیل zی که کد محاسبه می‌کند به صورت زیر است.

$$F(z) = z^{-7}\left(\frac{1}{390625 * \left(z - \frac{1}{5}\right)} + \frac{1}{78125}\right)$$

دستور IZTRANS

- این دستور برای محاسبه عکس تبدیل z یک طرفه یک تابع مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- فرض کنید می‌خواهیم عکس تبدیل z یک طرفه سیگنال $F(z) = \frac{z}{z-3}$ را محاسبه نماییم. به کمک کد زیر این موضوع امکان‌پذیر است.

```
>> syms n z
>> F=z/(z-3);
>> iztrans(F,z,n)
ans =
3^n
```

خروجی کد به صورت $f[n] = 3^n$ است.

مجددا یادآوری می‌شود دستورهای ztrans و iztrans مربوط به تبدیل z یک طرفه است.

مثال: خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ و ورودی $x(t)=n\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ را به وسیله Matlab بیابید.

پاسخ: از آنجایی که هر سیگنال ورودی و پاسخ ضربه در قبل صفر، مقدار صفر دارند، می‌توان از دستورات z یک طرفه برای آن‌ها استفاده کرد.

```
clc; clear; close all;
syms n z
h=(1/3)^n;
x=n*((1/5)^n);

H=ztrans(h,n,z);
X=ztrans(x,n,z);

Y=H*X;
y=iztrans(Y,z,n);
disp(y)
```

خروجی این کد به صورت زیر است.

```
(15*(1/3)^n)/4 - (21*(1/5)^n)/4 - (3*(1/5)^n*(n - 1))/2
```

بنابراین سیگنال خروجی محاسبه شده توسط Matlab به شکل زیر می‌باشد.

$$y[n] = \frac{15}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{21}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n (n - 1)$$

$$y[n] = \frac{15}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{15}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{3}{2}n\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

بنابراین پاسخ سوال به صورت زیر است:

$$y[n] = \left(\frac{15}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{19}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{3}{2}n\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)u[n]$$